Université Abdelmalek Essaâdi
FST Tanger/ Département de Maths
M121/Année 11-12

Série de TD n°3

Exercice1

Etudier la convergence de la série de terme général :

$$a)\ a_n = \frac{\ln n}{n^2};\ n \geq 1, \qquad b)\ a_n = \left(\arcsin \frac{1}{n}\right)^n;\ n \geq 1,$$

$$c)\ a_n = \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}};\ n \geq 1, \qquad d)\ a_n = \frac{(n+1)(n+2)\ldots 2n}{(2n)^n};\ n \geq 1.$$

Exercice2

Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)}$ converge. Calculer sa somme.

Exercice3

Montrer que la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^s}$ converge si et seulement si $s > 1$ et diverge si $s \leq 1$.

Exercice4

Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle.

a) Montrer que si $\lim_{n\to+\infty} a_n = \alpha \in \boldsymbol{R}$, alors $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = \alpha$.

b) Montrer que si $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k a_k = 0.$$

Exercice5

Etudier la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$.

Exercice6

Soit $\alpha > 0$, on considère la série numérique de terme général :

$$u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^\alpha}.$$

a) Montrer que, pour $\alpha \geq 2$, cette série converge.

b) Montrer que, pour $\alpha = 1$, cette série diverge. Que peut on dire pour $\alpha < 1$?

c) Montrer que, quand $\alpha \in]1, 2[$ et $n \to +\infty$, la série

$$\sum_{n\geq 0} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^\alpha}$$

ETUSUP .com

est équivalente à la série

$$\sum_{n\geq 0} \exp\left(-n^{\beta}\right);\ \beta > 0.$$

d) Etudier la série de terme général $v_n = \exp\left(-n^{\beta}\right)$ et conclure quant à la série proposée.

Exercice7

Etudier les séries de terme général :

$$a)\ u_n = \frac{\cos n}{n^2}, \qquad b)\ v_n = \frac{\cos n}{n},$$
$$c)\ w_n \frac{\cos^2 n}{n}, \qquad d)\ z_n = \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right).$$

Exercice8

Soit f une fonction continue et décroissante sur $[0, +\infty[$ telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

a) Etudier la série de terme général :

$$u_n = \int_{n\pi}^{\pi(n+1)} f(t)\sin(t)\,dt;\ n \geq 0.$$

b) Déduire la nature de la série de terme général :

$$u_n = \int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{\pi(n+1)}} \sin\left(t^2\right)dt;\ n \geq 1.$$

Exercice9

1) Etudier la convergence de la série de terme général :

$$u_n = -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2nx)\tan\frac{x}{2}dx$$

et calculer sa somme.

2) Etudier la série de terme général :

$$v_n = \frac{\pi}{4} - 1 + \frac{1}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$$

et calculer sa somme.

3) Montrer que les deux séries ne convergent pas absolument.

Exercice10

A partir de la série harmonique alternée $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$, on construit une nouvelle série en prenant p termes positifs, puis q termes négatifs, puis p termes positifs, ...C'est ainsi que, si par exemple $p = 3$ et $q = 2$, on forme la série

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + ..$$

Démontrer que la nouvelle série est convergente et calculer sa somme.

ETUSUP .com

ETUSUP.com

Programmation
Cours
Informatique
Optique
Chimie
Algébre
Corrigés
Mathématiques
Travaux Pratiques
Electricité
Physique
Résumés
Analyse
Diapo
Exercices
Livres
Contrôles Continus
Langues
MTU
Mécanique
Thermodynamique
Divers
Multimedia
Economie
Travaux Dirigés
Droit
Chimie Organique

et encore plus..